Задаци и решења

Клуб младих математичара "Архимедес"- Београд

"*М И С Л И Ш А*"

Математичко такмичење за ученике ОШ
по угледу на
Међународно такмичење "КЕНГУР"

2008 **8. разред**

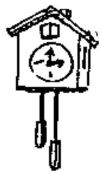
Задаци који се оцењују са 3 бода

1. У буре од 100 литара сипано је 40 литара воде. Колико ће у њему бити воде када се у њега налије још 70 литара?

(A) 90 (B) 100 (C) 105 (D) 110 (E) не може се одредити

Решење: (B) 100

Како је у питању буре од 100 литара, а 70+40=110, значи да ће се 10 литара прелити ван.



2. Познато је да овакав зидни сат сваког сата откуца онолико пута колико сати показује, а на сваких пола сата откуца само једном. Милица је почела да броји откуцаје таквог сата тачно у 8 и бројала све до подне истога дана. Колико је откуцаја Милица чула?

(A) 50 (B) 51 (C) 52 (D) 53 (E) 54

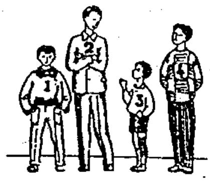
Решење: (E) 54

8+1+9+1+10+1+11+1+12= 54

3. Колико има природних бројева, мањих од 5000, који се записују само помоћу цифре 2?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Решење: (C) 4. То су бројеви: 2, 22, 222, 2222.



4. На слици су 4 дечака: Андра, Бора, Влада и Горан. Који је дечак највиши, ако се зна да Бора није највиши, али је виши од Андре и Горана, а Андра није виши од Горана.

(A) Андра (B) Бора (C) Влада (D) Горан
(E) не може се одредити
Решење: (C) Влада

5. Број a је већи од броја b. Ако број a повећамо за 1, а број b смањимо за 7, њихова разлика ће се:

(A) повећати за 1 (B) повећати за 7 (C) смањити за 1
(D) смањити за 7 (E) повећати за 8

Решење: (E) повећати за 8

6. Количник два броја је 13 пута мањи од дељеника. Колики је делилац?

(A) 1 (B) 13 (C) 26 (D) 39 (E) не може се одредити

Решење: (B) 13

Како је, према услову задатка, $x : y = \frac{x}{13} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{x}{13} \Rightarrow y = 13.$

7. Саша је желео да нађе три узастопна парна броја чији је збир 84. Написао је једначину:

$$k + (k+2) + (k+4) = 84.$$

Шта у Сашиној једначини представља слово k?

(A) Најмањи од три парна броја (B) Средњи паран број (C) Највећи од три парна броја (D) Просек од та три парна броја (E) Ни један од тражених бројева

Решење: (A) Најмањи од тражена три парна броја

8. Деветина ипо неког броја је 100. Који је то број?

(A) 150 (B) 500 (C) 600 (D) 900 (E) 1800

Решење: (C) 600

$$1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} x = 100 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot x = 100 \Rightarrow x = 600$$

Задаци који се оцењују са 4 бода

9. Решење једначине: $\frac{2x}{5} - \frac{x+7}{10} + 0{,}7 = x$ је:

(A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 7 (E) 10

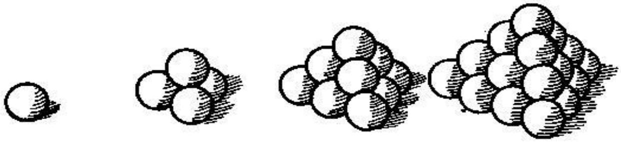
Решење: (B) 0

Помножимо леву и десну страну једначине са 10 и добијамо:

$$4x-(x+7)+7=10x$$

$$4x-x-7+7=10x \Rightarrow -7x=0 \Rightarrow x=0$$

10. Све своје кликере Пера је једног дана поређао како је показано на слици:



Колико је укупно кликера Пера за то употребио?

(A) 32 (B) 34 (C) 35 (D) 36 (E) 41

Решење: (C) 35, јер је редом употребљено 1+4+10+20 кликера.

11. Посматрај низ:

1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, _____

Који је следећи члан тог низа?

(A) 21121314 (B) 12131431 (C) 3121314

(D) 31121314 (E) не може се одредити

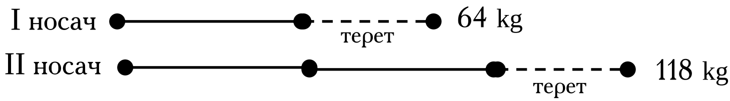
Решење: (D) 31121314. Пажња, пажња! У сваком следећем члану низа "описано" је колико којих цифара има у претходном члану! На пример, други члан 11 читамо као: 1 јединица (у првом члану низа), затим трећи члан 21 читамо: 2 јединице; четврт члан: 1 јединица и 1 двојка, итд. Број који тражимо треба да опише да у претходном члану низа има 3 јединице, 1 двојка, 1 тројка и 1 четворка, тј. 31121314.

12. Два носача носе једнако тешке терете. Тежина једног носача тачно је двоструко мања од тежине другог носача. Ако се зна да је тежина једног носача заједно са теретом 64 kg, а тежина другог носача заједно са теретом 118 kg, колика је онда тежина терета?

(A) 10 (B) 12 (C) 22 (D) 24 (E) 28

Решење: (A) 10.

Веома је погодно да се услови задатка прикажу цртежом:

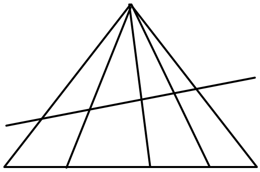


Слика показује да разлика између 118 kg и 64 kg представља половину тежине другог носача, или тежину првог носача. Како је 118 kg − 64 kg = 54 kg, значи да I носач има 54 kg, а да је терет који он носи 64 kg − 54 kg =10 kg.

Може и овако: Са n означимо тежину носача, а са t тежину терета, онда услове задатка можемо записати у облику: $n+t=64$ и $2n+t=118$. Сада размишљамо овако: други збир је већи за 54 јер у њему број n учествује два пута. Дакле $n=54$, итд.

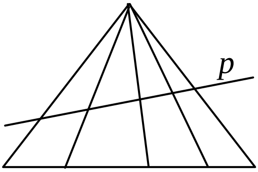
13. Колико на овој слици видите троуглова?

(A) 20 (B) 18 (C) 17 (D) 16 (E) 14



Решење: (A) 20

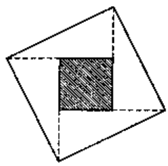
Одговор који би уједно садржао и образложење гласио би 10+10=20.



На слици без праве p видимо 4+3+2+1=10 троуглова (или: $(5\cdot4):2$, тј. онолико троуглова колико има дужи на основици великог троугла)

Кад је повучена права p, она није "уништила" ни један од тих 10 троуглова, али је зато формирала нових 10 (мањих, горњих) троуглова, па је зато одговор 10+10=20 троуглова.

14. На слици видите осенчен квадрат странице 1 cm. Свака његова страница продужена је преко темена за своју дужину. Тако су настала темена новог већег квадрата. Колика је површина већег квадрата?



(A) 1 cm^2 (B) 2 cm^2 (C) 3cm^2 (D) 4cm^2 (E) 5 cm^2

Решење: (E) 5 cm^2

Четири правоугла троугла, које видимо на слици, можемо "препаковати" у два правоуагоника димензија 2×1.

15. Кад је Сава напунио 12 година питао је родитеље колико они имају година.
"Нас троје имамо укупно 85 година, а мама је млађа од мене три године", рекао је тата.
Помозите Сави да израчуна колико је година његовим родитељима.

(A) мама 33, тата 36 (B) мама 37, тата 40 (C) мама 38, тата 35
(D) мама 35, тата 38 (E) мама 32, тата 35

Решење: (D) мама 35, тата 38

Ако број татиних година означимо са x, онда мама има $x-3$ године, па једначина гласи: $12+x+(x-3)=85$.
Решење $x=38$ значи да Савин тата има 38 година, а мама 35.

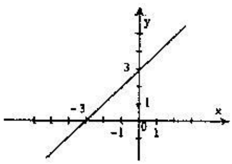
16. Разлика квадрата двају узастопних природних бројева је 49. Колики је производ тих бројева?

(A) 506 (B) 552 (C) 600 (D) 650 (E) 702

Решење: (C) 600

Ако већи од тих бројева означимо са $a+1$, а мањи са a, онда је према условy задатка $(a+1)^2-a^2=49$. Решење ове једначине је $a=24$ и то је мањи од тражених бројева. Већи је онда 25, а производ је 600.

17. Која једначина одговара нацртаном графику?



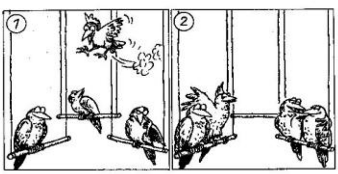
(A) $y=x$ (D) $y=3-x$
(B) $y=-x$ (E) $y=-x-3$
(C) $y=3+x$

Решење: (C) $y=3+x$

Задаци који се оцењују са 5 бодова

18. *Стари задатак*

Летеле су вране, слетеле на гране.
По једна врана, врана више,
по две вране, грана више.
Кол'ко, врана, кол'ко грана?



(A) 1 врана и 3 гране (B) 2 вране и 3 гране (C) 3 вране и 4 гране

(D) 4 вране и 3 гране (E) 3 вране и 3 гране

Решење: (D) 4 вране и 3 гране

Означимо број врана са x, а број грана са y. Ако на сваку грану слети по једна врана, по услову задатка, једна врана ће бити вишак (неће наћи имати своју грану). То значи да је број врана за 1 већи од броја грана: $x = y + 1$.

А ако на сваку грану седну по две вране, онда оне неће заузети све гране, тј. једна грана ће остати слободна. Другим речима, биће заузета $y - 1$ грана, а на свакој грани ће бити по две вране: $2(y-1)$. То значи да врана има $x = 2(y-1)$.

На тај начин смо дошли до две једначине са две непознате:

$$x = y + 1$$
$$x = 2(y-1)$$

Пошто су леве стране ових једначина једанаке, значи да су једнаке и десне стране:

$$y + 1 = 2(y-1).$$

Решење система $x = 4$, $y = 3$ значи да је било 4 вране и 3 гране.

(Још мало шале: решење се види на слици!)

19. У равни је дато 8 тачака, од којих су 4 на једној правој, а од осталих 4 ни које три нису на истој правој. Колико се различитих правих може повући кроз дате тачке (ако знамо да две различите тачке потпуно одређују једну праву)?

(A) 64 (B) 32 (C) 26 (D) 23 (E) 22

Решење: (D) 23

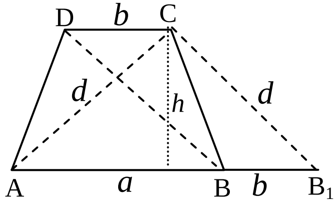
Како 8 различитих тачака од којих ни које 3 нису колинеарне, одређујуе (8·7):2=28 правих, овде ћемо имати мање правих (губитак) јер су неке од датих тачака колинеарне. Како су, према услову задатка, 4 тачке колинеарне, оне онда уместо 4·3:2=6 правих одређују свега једну праву, значи да ту имамо губитак од 5 правих, па је решење 28−5=23. Постоје и други начини! (1+4·3:2+4·4=23)

20. Висина једнакокраког трапеза је h, а његова површина је h^2. Под којим углом се секу његове дијагонале?

(A) 30^{o} (B) 45^{o} (C) 60^{o} (D) 75^{o} (E) 90^{o}

Решење: (E) 90^{o}

Како је површина трапеза $P=\dfrac{(a+b)\cdot h}{2}$, из услова $\dfrac{(a+b)\cdot h}{2}=h^2$ закључујемо да мора бити $\dfrac{a+b}{2}=h$. Посматрајмо сада одговарајућу слику:



Трапез ABCD је једнакокраки, троугао AB_1C је једнакокраки, а висина трапеза је уједно и висина троугла AB_1C. Осим тога, због $\dfrac{a+b}{2}=h$, односно због тога што је висина једнакокраког троугла једнака половини његове основице, закључујемо да је троугао AB_1C правоугли. Угао код темена B_1 је тада 45^{o}. Даље лако долазимо до закључка да су дијагонале трапеза међусобно нормалне.

21. У једном одељењу сваки дечак се дружи са четири девојчице, а свака девојчица се дружи са три дечака. Колико у том одељењу има ученика, ако се зна да има 4 девојчице више него дечака?

(A) 28 (B) 26 (C) 24 (D) 20 (E) 12

Решење: (A) 28

Ако број дечака у том одељењу означимо са m, тада девојчица има $m+4$. Према услову задатка имамо: $4m=3(m+4)\Rightarrow m=12$, одакле следи да је број девојчица 16, а укупан број ученика 28.

22. Наставник математике је једнога дана у три одељења, А, Б и В, постављао задатке у вези са једним истим бројем, позначимо га са a. У одељењу А рекао је да ученици најпре тај број a

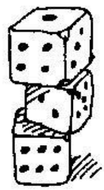
смање за 20%, а онда резултат увећају за 20%. У одељењу Б рекао је да ученици прво број a увећајуза 10%, а онда резултат смање за 10%. Ученици у одељењу В нису морали да мењају дати број a. Којим редом можемо поређати (од већег ка мањем) бројеве које су на крају имали ученици у сваком одељењу?

(A) А,Б,В (B) А,В,Б (C) Б,В,А (D) В,Б,А (E) В,А,Б

Решење: (D) В,Б,А.

Најједноставнији начин је да претпоставимо да се ради о броју a = 100. У одељењу А треба најпре 100 смањити за 20, а онда добијени број 80 увећати за његових 20%, тј. за петину. Тако ће се добити број 96 (80 +16). У одељењу В број 100 најпре повећамо за 10, а онда број 110 смањимо за његову десетину, тј. за 11. Тако добијамо 99 (110−11=99). Како се у одељењу С број није мењао, остаје да уредимо по величини бројеве 96, 99 и 100. Одговор је, дакле: 100, 99, 96, односно одељења В, Б, А.

23. Од три коцкице за игру "Не љути се човече" сложена је призма, тј. коцкице су поређане једна на другу тако што једна страна у потпуности прекрива другу. Колики најмањи може бити збир тачкица које се налазе на свим странама целе призме (2 базе и омотач)? (Имајте у виду да су тачкице на странама коцкице распоређене тако да је збир тачкица на супротним странама коцкице увек 7.)



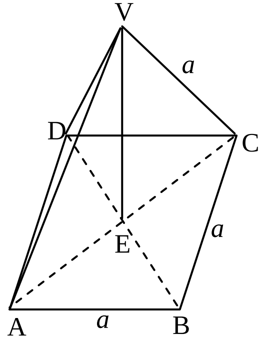
(A) 40 (B) 42 (C) 44 (D) 46 (E) 50

Решење: (C) 44.

Како збир тачкица на супротним странама коцкице износи 7, на овако формираној кули имамо 6 парова супротних страна (на сваком спрату по 2 пара), што даје укупно 6·7=42. Осим тога, имамо још и горњу и доњу страну те куле, па ћемо се побринути да на тим странама буде по 1 тачкица (како би збир био што је могуће мањи). Тако добијамо 42+2=44, као најмањи збир тачкица на датој кули.

24. Површина дијагоналног пресека правилне четворостране једнакоивичне пирамиде је 18. Колика је њена запремина?

(A) $36\sqrt{2}$ (B) $36\sqrt{3}$ (C) $30\sqrt{3}$ (D) $24\sqrt{2}$ (E) $48\sqrt{3}$



Решење: (A) $36\sqrt{2}$

Наводимо најпре неке особине ове пирамиде:

Дијагонала базе: $d = a\sqrt{2}$ (база је квадрат)

Дијагонала бочне стране - апотема:

$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (бочна страна је једнакостранични троугао)

Висина пирамиде: можемо је одредити на два начина

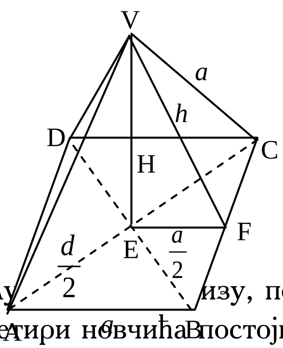
I начин: $H^2 = h^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ из троугла EFV

II начин: $H^2 = a^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$ из троугла AEV

Било како да радимо, $H = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ово значи да је $H = \dfrac{d}{2}$, а то значи да је троугао ACV је једнакокрако-правоугли, тј. представља половину квадрата.

Како нам је дата површина дијагоналног пресека (18), тај податак ћемо искористити да одредимо ивицу пирамиде. Наиме, дијагонални пресек је половина квадрата странице a. Цео квадрат би онда имао површину 18·2=36, што значи да је $a = 6$.

Коначно, тражена запремина је: $V = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow V = 36\sqrt{2}$



25. На столу, у низу, поређано 6 новчића. Зна се да међу прва четири новчића постоји један дефектан, али да и међу последња два новчића такође постоји један дефектан. Исправни новчићи имају исту масу, а дефектни новчићи такође међусобно имају исти масу, али су лакши од исправних новчића. Колико је најмање мерења на теразијама без тегова потребно извршити да би се одредила оба дефектна новчића?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Решење: (A) 2

Назовимо прва четири новчића заједничким именом A и означимо их са A_1, A_2, A_3, A_4, а следећа два новчића назовимо једним именом B и означимо их са B_1 и B_2.

Извршимо сада прво мерење на следећи начин: ставимо на први тас теразија два новчића из групе A, нпр. новчиће A_1 и A_2, а на други тас теразија ставимо један новчић из групе A (A_3), и један новчић из групе B (B_1). Анализирајмо случајеве који могу да наступе:

1) Ако претегне други тас, значи дефектни су новчић B_2 и један од новчића A_1 или A_2. Другим мерењем упоређујемо новчиће A_1 и A_2 и тако проналазимо други дефектан новчић.

2) Ако претегне први тас, значи да су оба новчића A_1 и A_2 исправна, а да су на другом тасу један или оба новчића дефектна. Другим мерењем их упоређујемо. Ако у другом мерењу теразије буду у равнотежи, значи да су оба новчића (A_3 и B_1) дефектна. Ако, пак, у другом мерењу B_1 претегне, значи да су дефектни A_3 и B_2, а ако A_3 претегне значи да су дефектни A_4 и B_1.

3) Ако су теразије у равнотежи, тада су на њима или сви новчићи исправни, или је на сваком тасу по један дефектан новчић. Ставимо затим на теразије новчиће A_1 и A_2, упоредимо у следећем мерењу њихове масе. Ако су и у овом мерењу теразије у равнотежи, то значи да су сви новчићи које смо у првом мерењу ставили на теразије били исправни, тј. тако смо открили да су дефектни новчићи A_4 и B_2. Ако у другом мерењу теразије не буду у равнотежи, тј. ако један од новчића A_1 или A_2 претегне, значи да је дефектан онај који је у том мерењу имао мању масу. Из тога још следи да је A_3 исправан, а B_1 дефектан.